Kombinatorika

A kombinatorika véges halmazokkal foglalkozik (egy halmaz konkrét elemszámmal), a belőlük képezett különböző objektumokkal – ezek számának meghatározásával. A képezhető objektumok számában lévő különbségek összefüggenek azzal, hogy figyelembe vesszük-e az elemek sorrendjét (rendezett elemk-sokat vagy csak k elemű részhalmazt hozunk létre); továbbá, hogy az elemeket többször is felhasználhatjuk vagy sem.
A kombinatorikát nevezik a véges halmazok elméletének is.
Némely feladat megoldható kombinatorikai ismeretek nélkül is – anélkül, hogy ismernénk a következő fogalmakat: variációk, kombinációk, permutációk, ismétléses, ismétlés nélküli, … – elmélkedéssel. Csak azt kell tudnunk, mikor kell szoroznunk és mikor összeadnunk.

példa:

I. Egy osztály osztályfőnöke évvégén három diákot könyvjutalomban részesít. Ezért három különböző könyvet vásárolt. Mivel minden diák ügyes volt és jól teljesített, véletlen módon választja ki a jutalmazottakat. Hány különböző mód létezik a 32 fős osztályban erre, ha mindegyik könyvet más kapja?

Ha helyesen gondolkodunk, nem kell tudnunk, hogy 32 elem harmadosztályú ismétlés nélüli variációjáról van szó.

próbáljuk fokozatosan számolni – a tanár egymás után sorsolja ki az összes diák nevét tartalmazó urnából a megjutalmazottakat:

az első könyvet 32 különböző módon adhatja: a sorsolás elején az osztály összes diákjának neve szerepel a cédulákon → mikor az első jutalmazott megkapta a könyvet, a neve már nem szerepel a következő sorsolásoknál

ezért a második könyvet 31 féleképp adhatja

az utolsót pedig csak 30 különböző módon

Most pedig mit kell ezekkel a számokkal csinálni? Az osztályfőnök megtehette volna egyszerre is ezt: mindhárom cédulát kihúzni az urnából. Vagyis a folyamatot egy eseménynek tekinthetjük, csak mi bontottuk fel. Így ezeket a lehetőségeket (számoka) össze kell szoroznunk.

32.31.30 = 29 760

II. Változtassunk a feledaton, hogy a három könyv azonos legyen. Hogy változik meg az eredmény?

Valahogy összefügg az előző feledattal. De hogyan, és miképp segít ez a számításban?

Tegyük fel, hegy a tanár hasonló módon jár el a jutalmazáskor.

Válasszunk ki három nevet (helyettesítsük A B és C betűkkel). Ha a sorsolásnál A-B-C sorrendben húzzuk ki őket, vagy A-C-B sorrendben, vagy más lehetséges sorrendben, de ugyanazon három nevet, tulajdonképpen ugyanaz a hármas kapja a jutalmat – nem változik semmi, az eredmény ugyanaz. Vagyis az előző eredményt osztanunk kell. És mely számmal? Azzal a számmal, ahányféleképp tudom sorrendbe rakni a három elemet.

A-B-C	A-C-B
B-A-C	B-C-A
C-A-B	C-B-A

32.31.30:6 = 4 960

III. Módosítsuk most az eredeti feladatot úgy, hogy a diák akár több könyvet is kaphat. Ekkor hogy változik az eredmény?

Ennél a sorsolásnál mikor egy diákot kisorsoltak az első körben, visszakerül a cédulája az urnába, és újra kisorsolhatóvá válik. Vagyis mindegyik húzásnál 32 különböző helyre kerülhet a könyv.

$32.32.32 = 32^3 = 32\,768$

IV. Öt barát együtt ment moziba, és közösen vásároltak öt jegyet egymás mellé. Hányféleképp ülhetnek le?

Ezt a problémát is fokozatosan oldjuk.

az első öt ülésből választhat → egyet elfoglal, így négy üres hely marad

da második négyből

a harmadik háromból; a negyedik kettőből, és az utolsónak csak egy lehetősége marad

5.4.3.2.1 = 120

V. Hány különböző négy- és ötjegyű számot képezhetünk a: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számjegyekből, ha a számokban a szájegyek nem ismétlődhetnek?

A létrehozott szám vagy négyjegyű, vagy ötjegyű lesz. Így ezek darabszámát külön határozzuk meg, majd őket összeadjuk – ez a két esemény nem történhet meg egyszerre, ezért a lehetőségek számát nem szorozni, hanem összeadni kell.

kezdjünk a négyjegyűekkel – és az elejétől

az első helyre (az első pozícióra – ezresek) hét számjegyből választhatunk: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 – a nulla nem kerülhet előre, mert a szám így csak háromjegyű lenne

a második helyre ugyancsak hét számjegyből választhatunk – a hét számjegyből egyet felhasználtunk, de most már választhatjuk a nullát is

a harmadikra hatból; a negyedikre öt számjegyből választhatunk

7.7.6.5 = 1 470

folytatjuk az ötjegyűekkel

az első helyre: hét lehetőség (nulla nélkül); a másodikra: hét (a nullával); a harmadikra: hat; a negyedikre: öt; az ötödikre: négy

7.7.6.5.4 = 5 880

a választ megkapjuk, ha a két számot összeadjuk

1 470 + 5 880 = 7 350